極大測度の一般化

平下幸男

(1) X をコンパクト Hausdorff 空間とし，$C(X)$ を X 上の実数値連続関数の全体とする。さらに A を $C(X)$ の定数関数を含む線形部分空間とする。

Choquet 型積分表現論に関して，Phelps [3] は X を線形位相空間の凸部分集合とし，A を X 上の連続 affine 写像の全体とするという制限のもとにこれを論じ，又 Bishop 及び de Leeuw [1] は A が separable であるという制限のもとにこれを論じている。ところで Phelps [3] は X に関する制限をはずすにあたって，逆に A に対して X の各点を分離することを要求し，Bishop 及び de Leeuw [1] は A に関する制限をはずす代償として，理論の有効範囲を狭くしてしまっている。

一方 Boboc 及び Cornea [2] は下有界下半連続関数の全体がなす cone の性質を詳細に研究することにより，その成果の一部として結果的に Choquet 型積分表現論の一般的展開に成功している。しかしこの場合幾何学的単体に関する Choquet-Meyer の定理の助けを必要とする。

この論文では極大測度の概念を新たに定義しなおすことにより，Phelps [3] の流儀によっても Choquet 型積分表現論が一般的に論じられることを示す。

(2) f を $C(X)$ の元とし，X の任意の元 x に対して $\bar{f}(x)=\inf\{h(x)\,;\,h\in A$ かつ $f\leqq h\}$ とおく。又 $C(X)$ の部分集合 K を $K=\{f\,;\,f=\bar{f}\}$ と定める。すると K は A を含み演算 $\min(f,g)$ に関して閉じた最小の閉 cone となる。$P(X)$ は X 上の probability measure の全体を表わすものとする。μ，ν を $P(X)$ の元として $-K$ の任意の元 g に対

して $\mu(g) \leqq \nu(g)$ が成立するとき $\mu < \nu$ と定めることにすれば，この関係は $P(X)$ における半順序関係となる。この半順序が順序となるための必要十分条件は A が X の各点を分離することである。$P(X)$ の元 μ が極大測度であるとは $P(X)$ の任意の元 ν に対して $\mu < \nu$ ならば $\nu < \mu$ となることと定める。$C(X)$ の部分集合 $K-K$ の位相的閉包を $\overline{K-K}$ と表わす。$\overline{K-K}$ の元 f を A 連続であるとよぶ。X の部分集合 S の特性関数 χ_S に対して，A 連続な関数の可算列 $\{f_n ; n=1, 2, \cdots\}$ が存在して，任意の正の整数 n に対して $\chi_S \leqq f_n$ かつ任意の x に対して $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \chi_S(x)$ が成立するとき S は A-Bair 集合であるという。

これらの定義のもとで次の四つの補題が成立する。

補題 2-1. $P(X)$ の任意の元 μ に対して $\mu < \nu$ となる極大測度 ν が存在する。

補題 2-2. $P(X)$ の元 μ が極大測度であるための必要十分条件は，任意の A 連続な関数 f について $\mu(\bar{f}) = \mu(f)$ となることである。

補題 2-3. H を実数の可算無限直積空間 $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ に含まれるコンパクト凸集合とする。このとき H の任意の端点 $\mathbf{X} = \langle x_n \rangle$ について $\varliminf_{n\to\infty} x_n \geqq 0$ となるならば，H のすべての元 $\mathbf{X} = \langle x_n \rangle$ に対して $\varliminf_{n\to\infty} x_n \geqq 0$ が成立する。

補題 2-4. A の Choquet 境界を B_A と表わす。$C(X)$ の元の可算列 $\{f_n ; n=1, 2, \cdots\}$ に対して $\lim_{n\to\infty} \overline{f_n}(x) \geqq 0$ が B_A のすべての元 x について成立するなら，X のすべての元 x に対しても $\lim_{n\to\infty} \overline{f_n}(x) \geqq 0$ が成立する。

補題 2-2 と 2-4 によって容易に次の定理が証明される。

定理 2-5. S を A-Baire 集合とし $S \cap B_A = \phi$ とする。すると任意の極大測度 μ は $\mu(S) = 0$ をみたす。

X の一点 x の表現測度に関していえば，x の点測度 ε_x に対する極大測度 μ をとれば μ の support は定理 2-5 の意味において Choquet 境界 B_A に含まれてしまう。以下この節では前記の補題を証明してゆく。ところで，

補題 2-3 及び 2-4 においては極大測度の概念は使われていないことを注意しておく。補題 2-3 を証明するには Bonsall の論法を少し改変して Hahn-Banach の拡張定理と Fatou の補題を使う。補題 2-4 は補題 2-3 から直接的に導かれるであろう。

＜補題 2-1 の証明＞　半順序集合 $P(X)$ の全順序部分集合の族は包含関係によって帰納的順序集合とみなされる。$P(X)$ の元 μ に対して μ を含む極大集合 $\{\mu_\lambda ; \lambda\in\Lambda\}$ が存在する。ここで $\mu=\mu_{\lambda_0}$, $\Lambda_0=\{\lambda\in\Lambda ; \lambda\geqq\lambda_0\}$ とおく。Λ_0 が有限集合のとき Λ には最大元が存在するが，これに対応する測度が求める極大測度となる。Λ_0 が無限集合のとき $B_\lambda=\{\mu_{\lambda'} ; \lambda'\geqq\lambda\}$ とおけば $\{B_\lambda ; \lambda\in\Lambda_0\}$ は $P(X)$ におけるフィルターの基底になっている。$P(X)$ は弱コンパクトだからこのフィルターは触点をもつ。すなわち $\bigcap_{\lambda\in\Lambda_0}\overline{B}_\lambda\neq\phi$。従って $\bigcap_{\lambda\in\Lambda_0}\overline{B}_\lambda$ の元 ν が存在するが，この ν が求める極大測度の一つとなる。なぜならばまず B_{λ_0} の有向点列 $\{\mu_{\lambda'} ; \lambda'\in\Lambda'\}$ が存在して $P(X)$ の弱位相において $\lim_{\lambda'}\mu_{\lambda'}=\nu$ となる。よって $-K$ の元 g に対して $\lim_{\lambda'}\mu_{\lambda'}(g)=\nu(g)$ が成立する。ここで $\mu_{\lambda_0}<\mu_{\lambda'}$ より $\mu(g)=\mu_{\lambda_0}(g)\leqq\mu_{\lambda'}(g)$ が得られるから $\mu(g)\leqq\nu(g)$ となる。これは $\mu<\nu$ を意味している。一方 $\nu<\nu'$ なる任意の測度 $\nu'\in P(X)$ に対しても前段の論法によって $\mu_\lambda<\nu<\nu'$ がすべての $\lambda\in\Lambda$ について成立するから $\{\mu_\lambda ; \lambda\in\Lambda\}$ の極大性によって ν' は $\{\mu_\lambda ; \lambda\in\Lambda\}$ の元でなくてはならない。よって Λ の元 λ_1 が存在して $\mu_{\lambda_1}=\nu'$ となるはずである。$\overline{B}_{\lambda_1}\ni\nu$ となることから前段とまったく同様にして $\nu'<\nu$ が示される。よって ν は求める極大測度であることが証明された。　（証明終り）

＜補題 2-2 の証明＞　（必要性）$P(X)$ の元 μ を極大測度とする。$C(X)$ 上の半加法的連続関数 p を $C(X)$ の任意の元 g に対して $p(g)=\mu(\bar{g})$ によって定義すると p は positive homogeneous となる。$C(X)$ の元 f を一つ固定して考える。f によって生成される実線形部分空間 $\mathbf{R}\cdot f$ 上の連続線形関数 L を任意の実数 r に対して $L(rf)=r\cdot\mu(\bar{f})$ によって定義する。明らかに $L\leqq p$ が成立しているから，Hahn-Banach の拡張定理によって $L\leqq p$ なる性質を保存したまま L は $C(X)$ 上の連続線形関数に拡張

できる。これを再び L によって表わしても混乱のおそれはない。ここで L は X 上の測度 ν によって表現されるが，この ν が $\nu\in P(X)$ かつ $\mu<\nu$ をみたすことが以下に示される。

$g\geqq 0$ なる $C(X)$ の元に対して $\overline{-g}\leqq 0$ より $-\nu(g)=\nu(-g)=L(-g)\leqq p(-g)=\mu(\overline{-g})\leqq 0$。ゆえに $\nu(g)\geqq 0$。よって ν は正測度である。一方 $\nu(1)\leqq p(1)=\mu(1)=1$。さらに $\nu(-1)\leqq p(-1)=\mu(-1)=-1$。従って $\nu(1)=1$ を得る。これより ν は $P(X)$ の元となる。次に $-K$ の任意の元 g に対して $\overline{-g}=-g$ であるから $\nu(-g)\leqq p(-g)=\mu(\overline{-g})=\mu(-g)$。すなわち $\mu<\nu$ を得る。

さて題意によれば μ は極大測度であったから $\nu<\mu$ が成立する。ここでもし f が A 連続であるとすれば $\nu(f)=\mu(f)$。L の定義によって $\nu(f)=\nu(\overline{f})$ であったから，このとき $\mu(f)=\mu(\overline{f})$ を得る。

（十分性） μ を $P(X)$ の元とする。はじめに $C(X)$ の任意の元 f に対して $\mu(\overline{f})=\inf\{\mu(g);\ g\in K$ かつ $f\leqq g\}$ が成立していることを示す。式の右辺の値を a とおく。すると K の可算列 $\{g_n;\ n=1, 2, \cdots,\}$ ですべての自然数 n に対して $f\leqq g_n$ かつ $\lim_{n\to\infty}\mu(g_n)=a$ をみたすものが存在する。ここで K が演算 $\min(f, g)$ について閉じているから $\{g_n\}$ は単調減少列と仮定して一般性を失わない。X 上の関数 f' を X の任意の元 x に対して $f'(x)=\lim_{n\to\infty}g_n(x)$ によって定義すると $\mu(f')=a$ を得る。ここでもし $\mu(\overline{f})<\mu(f')$ と仮定すると実数 $\varepsilon>0$，r 及び X のコンパクトな部分集合 S で $\mu(S)>0$ かつ $S\subset\{x\in X;\ \overline{f}(x)<r-\varepsilon<r<f'(x)\}$ をみたすものが存在する。又 S の任意の元 y に対して $f\leqq g_y$ なる K の元 g_y で $g_y(y)<r-\varepsilon$ をみたすものが存在する。ここで S はコンパクトであるから，ある S の有限部分集合 $\{y_1,\ y_2,\ \cdots\cdots y_m\}$ が存在して，S のすべての元 x に対して $g(x)=\inf_{1\leqq j\leqq m} g_{y_j}(x)<r-\varepsilon$ をみたす。ここで $f_k=\min(g, g_k)$ とおけば $f_k\in K$ となりさらに S の任意の元 x に対して $f(x)\leqq f_k(x)<r-\varepsilon<r<f'(x)\leqq g_k(x)$ を得る。これより $a\leqq\mu(f_k)\leqq\mu(g_k)-\varepsilon\cdot\mu(S)$。従って $a+\varepsilon\cdot\mu(S)\leqq a$ となるがこれは矛盾である。よって $\mu(f)=\mu(f')=a$。

次に μ がすべての A 連続な関数 f に対して $\mu(f)=\mu(\overline{f})$ となるという性質をもっているものとする。すると $\mu<\nu$ なる測度 ν をとれば，すべての $-K$ の元 h に対して $\mu(\overline{h})=\mu(h)\leqq\nu(h)\leqq\nu(\overline{h})$。さらに $\nu(\overline{h})=\inf\{\nu(g);\ g\in K$ かつ $h\leqq g\}\leqq\inf\{\mu(g);\ g\in K$ かつ $h\leqq g\}=\mu(\overline{h})=\mu(h)$。ゆえに $\mu(h)=\nu(h)$ が $-K$ のすべての元 h に対して成立する。このことは μ が極大測度であることを示している。（証明終り）

＜補題 2-3 の証明＞　$\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ の n 番目の projection $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}\longrightarrow\mathbf{R}$ を p_n と表わす。H はコンパクトだから，任意の正の整数 n に対して $\sup\{p_n(\mathbf{X});\ \mathbf{X}\in H\}<r_n$ となる正の実数 r_n が存在する。H 上の連続関数 f を $f(\mathbf{X})=\sum_{n=1}^{\infty}p_n^2(\mathbf{X})\cdot 2^{-n}r_n^{-1}$ によって定義すると f は strictly convex となる。$C(H)$ の部分集合 $\{p_n;\ n=1,2,\cdots\}\cup\{1\}$ によって生成される実線形部分空間を D とおく。以下 H の一つの元 $\mathbf{X}_0$ を固定して考える。D 上の positive な線形写像 L を，任意の n に対して $L(p_n)=p_n(\mathbf{X}_0)$，$L(1)=1$ によって定義する。L は $C(X)$ 上の positive な線形写像 $\widetilde{L}$ に拡張されるが，このとき特に $\widetilde{L}(f)=\inf\{L(h);\ h\in A$ かつ $f\leqq h\}$ とおける。さらに $|\widetilde{L}(f)|\leqq L(1)\cdot||f||$ より $\widetilde{L}$ は $C(H)$ 上連続となるから H 上の probability measure μ によって表現できる。$f\leqq\overline{f}$ より $\mu(f)\leqq\mu(\overline{f})$。一方 A の元 h で $f\leqq h$ となるものに対して $\overline{f}\leqq\overline{h}=h$ より $\mu(\overline{f})\leqq\mu(h)=h(\mathbf{X}_0)$。ゆえに $\mu(\overline{f})\leqq\overline{f}(\mathbf{X}_0)=\mu(f)$。これは $\mu(f)=\mu(\overline{f})$ を示している。従って $\mu(\{x;\ f(x)=\overline{f}(x)\})=1$ が得られる。ところが一方 f は strictly convex であったから $\{x;\ f(x)=\overline{f}(x)\}\subset\mathrm{ex}\,H$ となる。それゆえ $\mu(H)=\mu(1)=1$。すなわち $\mu(\mathrm{ex}H)=1$。ここで題意より $\mathrm{ex}H$ の任意の元 $\mathbf{X}$ に対して $\varliminf_{n\to\infty}p_n(\mathbf{X})\geqq 0$ が成立するから Fatou の補題を使えば $\varliminf_{n\to\infty}\mu(p_n)\geqq 0$ いいかえると $\varliminf_{n\to\infty}p_n(\mathbf{X}_0)\geqq 0$ が得られる。

（証明終り）

＜補題 2-4 の証明＞　X の一つの元 x_0 を固定して考える。$\overline{f}_n(x_0)=\inf\{h(x_0);\ h\in A$ かつ $f_n\leqq h\}$ であるから，任意の正の整数 n に対して A の元 h_n で $f_n\leqq h_n$ かつ $\overline{f}_n(x_0)\leqq h_n(x_0)<\overline{f}_n(x_0)+\dfrac{1}{n}$ をみたすものが存在する。ここで連続関数 $\omega;\ X\longrightarrow\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ を $p_n(\omega(x))=h_n(x)$ がすべての

n について成立するように定める。H を $\omega(X)$ のコンパクト凸包とするとき，H の端点は $\omega(B_A)$ に含まれる。従って H の任意の端点 y について Choquet 境界の点 $x \in B_A$ が存在して $\omega(x)=y$ がいえる。このことより次式を得る。

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} p_n(y) &= \lim_{n\to\infty} p_n(\omega(x)) \\ &= \lim_{n\to\infty} h_n(x) \\ &\geqq \lim_{n\to\infty} f_n(x) \geqq 0。\end{aligned}$$

従って補題2-3より H のすべての元 y に対して $\lim_{n\to\infty} p_n(y) \geqq 0$ が成立する。このことは X のすべての元 x に対して $\lim_{n\to\infty} h_n(x) \geqq 0$ が成立することを示している。そこで特に $x=x_0$ とおけば次式を得る。

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \overline{f}_n(x_0) &= \lim_{n\to\infty} (\overline{f}_n(x_0)+\frac{1}{n}) \\ &\geqq \lim_{n\to\infty} h_n(x_0) \geqq 0。\end{aligned}$$

（証明終り）

（3） この節では，Bishop 及び de Leeuw［1］によって論じられた A が separable な場合の Choquet 型積分表現定理が，この論文の流儀ではどのように展開されるかを示す。ここでは，特にことわることなく＜文献＞［1］，［3］の記号をいくつか引用する。さらに $C(X)$ の元 f に対して新たに次の記号を導入する。

$L_f=\{x\in X$；ある測度 $\mu\in P(X)$ が存在して，$f^2(x)<\mu(f^2)$ かつ A のすべての元 g について $\mu(g)=g(x)\}$。

$E_f=\{x\in X；f(x)<\overline{f}(x)\}$。

$\widetilde{B}_A=\{x\in X；\varepsilon_x$ と順序比較可能なすべての $\mu\in P(X)$ について $\mu(i_A(x))=1\}$。

$D_A=\bigcap_{f\in C(X)}\{x\in X；f(x)=\overline{f}(x)\}$。

$H_x=\{\mu\in C(X)；A$ のすべて の元 f について $\mu(f)=f(x)\}$.

$H_A=\{x\in X；H_x=\{\varepsilon_x\}\}$。

このとき L_f，E_f はともに $F\sigma$ 集合となり $L_f\subset E_{f^2}$ となることが容

易に確かめられる。さらに次の 2 つの補題が成立するが，その証明は定理 3-3 のあとに回す。

補題 3-1. f を A の元とすれば $f^2 \in -K$。

補題 3-2. A の可算部分集合 $\{f_n ; n=1, 2, \cdots\cdots\}$ が A で稠密ならば $\bigcup_{n=1}^{\infty} L_{f_n} = \breve{B}_A{}^C$。

そこで μ を極大測度とすれば $\mu(f^2{}_n) = \mu(\overline{f^2}_n)$ より $\mu(E_{f^2_n}) = 0$ となる。従って当然 $\mu(L_{f_n}) = 0$ となるが，測度の性質より $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} L_{f_n}) = 0$。これは $\mu(\breve{B}_A{}^C)$を示している。よって次の定理が証明されることとなる。

定理 3-3. A が separable で μ が極大測度ならば $\mu(\breve{B}_A) = 1$。

＜補題 3-1 の証明＞ A の元 f は包含関係 $A \subset A^{**}$ によって A^{**} の元 $\hat{f}$ と同一視される。$\hat{f}$ は $K(A)$ 上の連続 affine 関数だから $\hat{f}$ は凸関数となる。$K(A)$ 上の関数 $-\hat{f}^2$ の包含関係 $X \subset K(A)$ による X への制限を g とすると $g \in K$。ところで X の任意の元 x に対して

$$g(x) = (-\hat{f}^2)(\varepsilon_x) = -(\hat{f}(\varepsilon_x))^2 = -f^2(x)。$$

その結果 $-f^2 \in K$ を得る。

＜補題 3-2 の証明＞ $C(X)$ の部分集合 E に対して $i_E(x) = \{y \in X ; E$ のすべての元 f について $f(x) = f(y)\}$ であることを注意しておく。$\{f_n\}$ は A で稠密だから $i_A(x) = \bigcap_{n=1}^{\infty} i_{f_n}(x)$ が成立する。このことより以下のような同値な命題の系列が得られる。

$$\begin{aligned}
\bigcup_{n=1}^{\infty} L_{f_n} \in x &\iff x \in L_{f_n} \text{ なる } n \text{ が存在する。}\\
&\iff \int |f_n - f_n(x)|^2 d\mu > 0 \text{ なる } \mu \text{ が存在する。}\\
&\iff \mu(i_{f_n}(x)) < 1\\
&\iff \mu(i_D(x)) < 1\\
&\iff x \notin \breve{B}_A
\end{aligned}$$

（証明終り）

定理 3-4. $B_A = D_A = H_A \subset \breve{B}_A$。さらにもし A が X の各点を分離するならば $B_A = \breve{B}_A$。

＜証明＞ $D_A \subset B_A \subset H_A \subset \breve{B}_A$ なることは自明である。又定理の後半は前半より容易に証明できる。よって $B_A \subset D_A$ 及び $H_A \subset B_A$ を証明すればよい。はじめに $B_A \subset D_A$ なることを示す。B_A の元を x，$C(X)$ の元を

f とする。f を $K(A)$ 上の連続関数 F に拡張すると $\phi_x \in \mathrm{ex}\, K(A)$ より

$$
\begin{aligned}
f(x)=F(\phi_x)=\overline{F}(\phi_x) &= \inf\{G(\phi_x)\,;\, G\in\mathcal{A} \text{ かつ } F\leqq G\} \\
&\geqq \inf\{g(x)\,;\, g\in A \text{ かつ } f\leqq g\} \\
&= \overline{f}(x)。
\end{aligned}
$$

ゆえに $x\in D_A$ を得る。次に $H_A\subset B_A$ なることを示す。x を X の元で B_A には含まれないものとする。すると ϕ_x は $K(A)$ の端点でないから $K(A)$ の相異なる二つの元 L_1, L_2 が存在して $\phi_x=\frac{1}{2}(L_1+L_2)$ をみたす。Hahn-Banach の拡張定理を使えば L_1, L_2 はともに $P(X)$ の元 ν_1, ν_2 によって表現されることがわかる。そこで $\nu=\frac{1}{2}(\nu_1+\nu_2)$ とおけば ν は H_x の元となる。ところが ν_1, ν_2 ともに ε_x とは異なるから $\nu(\{x\})<1$ を得る。これより ν は ε_x と異なることが結論される。従って $x\in H_A$。

(証明終り)

(**4**) この節では極大測度の一意性について論じる。2つの測度 μ, ν に対して $\mu(f)=\nu(f)$ がすべての A の元 f について成立するとき $\mu\sim\nu$ と書く。測度 μ に対する極大測度が一意的であるとは $\mu\sim\nu_1$, $\mu\sim\nu_2$ なる二つの極大測度 ν_1, ν_2 に対して $\nu_1<\nu_2$ かつ $\nu_2<\nu_1$ が成立することを意味する。Phelps [3] における一意性定理の直接的拡張として次の定理が得られる。

定理 4-1. 次の三命題は同値である。

<1> 任意の点測度 ε_x に対して，その極大測度は一意的に存在する。

<2> 任意の点測度 ε_x に対して，その極大測度を μ とすれば $\mu(f)=\overline{f}(x)$ が成立する。

<3> f, g を $-K$ の元とするとき $\overline{f+g}=\overline{f}+\overline{g}$ が成立する。

上記定理のある種の一般形として次の定理が得られる。

定理 4-2. 次の三命題は同値である。

<4> 任意の測度に対して，その極大測度は一意的に存在する。

<5> f を $-K$ の元，μ を測度とすれば $\mu(f)=\inf\{\mu(h)\,;\, h\in A$

かつ $f \leqq h$ が成立する}。

＜6＞ f を $-K$ の元，μ を測度とすれば $\sup\{\mu(h)$; $h \in A$ かつ $h \leqq f\} = \inf\{\mu(h)$; $h \in A$ かつ $f \leqq h\}$ が成立する。

補題 4-3. 命題＜4＞より次の命題＜7＞が導かれる。

＜7＞ A の位相的閉包は $K \cap (-K)$ に等しい。

又また上記命題＜1＞と＜4＞の間の関係について，次の三つの定理が証明される。

定理 4-4. 命題＜1＞のもとで，測度 μ に対して $\mu(\bar{f}) = \inf\{\mu(h)$; $h \in A$ かつ $f \leqq h\}$ が $-K$ のすべての元 f について成立するならば μ に対する極大測度は一意的である。

定理 4-5. $f \leqq g$ となる $-K$ の元 f と K の元 g に対して $K \cap (-K)$ の元 h が存在して $f \leqq h \leqq g$ をみたすならば命題＜1＞が成立する。

定理 4-6. 命題＜7＞の条件のもとで $f \leqq g$ となる $-K$ の元 f と K の元 g に対して，A の位相的閉包の元 h が存在して $f \leqq h \leqq g$ をみたすならば命題＜4＞が成立する。

＜定理 4-1 の証明＞ ＜2＞⇒＜3＞及び＜3＞⇒＜1＞の証明は Phelps [3] における証明とまったく同様である。よって＜1＞⇒＜2＞のみ証明しておけばよい。x を X の一つの元として，μ を $\varepsilon_x < \mu$ なる極大測度とする。$-K$ の元 f に対して $\bar{f}(x) = \inf\{h(x)$; $h \in A$ かつ $f \leqq h\}$ であるが，さらにこれは $\bar{f}(x) = \inf\{\mu(h)$; $h \in A$ かつ $f \leqq (h\}$ と変形できる。従って $\mu(f) \leqq \bar{f}(x)$。次に線形写像 ε_x は A 上 positive であるが，これを $C(X)$ 上へ拡張するとき $L(f) = \bar{f}(x)$ となるような拡張関数 L をえらぶことができる。L の表現測度を ν とするとき $\nu \in P(X)$ なることを確かめるのは容易である。ν に対する極大測度を τ とする。$f \in -K$ より $\nu(f) \leqq \tau(f)$。さらにここで題意より $\mu < \tau$ かつ $\tau < \mu$ が成立しているから $\tau(f) = \mu(f)$ を得る。それゆえ $\bar{f}(x) = L(f) = \nu(f) \leqq \tau(f) = \mu(f)$。これと前段とを合わせて $\bar{f}(x) = \mu(f)$ の成立が示される。

（証明終り）

＜定理 4-2 の証明＞ ＜5＞⇒＜4＞及び＜5＞⇒＜6＞の証明は容

易である。従って＜4＞⇒＜5＞のみを証明すればよい。μ を $P(X)$ の元，f を $-K$ の元とする。μ は A 上の連続線形写像で positive なものと解釈される。そこで Hahn-Banach の定理より，この写像の $C(X)$ 上への拡張 L で $L(f)=\inf\{\mu(h)\,;\,h\in A$ かつ $f\leqq h\}$ となるものをえらぶことができる。L の表現測度 ν は $P(X)$ の元である。ν に対する極大測度の一つを ν とする。ここで $\mu\sim\nu$ かつ $\nu\sim\tau$ であるから $\mu(f)=\tau(f)$ を得る。一方 $\nu(f)\leqq\tau(f)$，又 L のきめ方より $\mu(f)\leqq L(f)$ が導かれるから $\mu(f)=L(f)=\nu(f)=\tau(f)$ が成立する。これより容易に $\mu(f)=\inf\{\mu(h)\,;\,h\in A$ かつ $f\leqq h\}$ を得る。　（証明終り）

＜**補題4-3の証明**＞　$P(X)$ の元 μ に対して，$C(X)$ 上の半加法的連続関数 q_μ，r_μ を次のように定義する。

$$q_\mu(f)=\inf\{\nu(f)\,;\,\nu\in P(X)\text{ かつ }\mu\sim\nu\}$$
$$=\inf\{\mu(h)\,;\,h\in A\text{ かつ }f\leqq h\}。$$
$$r_\mu(f)=\inf\{\nu(f)\,;\,\nu\in P(X)\text{ かつ }\mu\sim\nu\}$$
$$=\sup\{\mu(h)\,;\,h\in A\text{ かつ }h\leqq f\}。$$

すると q_μ は positive homogeneous となり，又 $r_\mu(f)=-q_\mu(-f)$ が $C(X)$ のすべての元 f について成立する。さらに容易に確かめられるように $C(X)$ の元 f が A の位相的閉包に入るための必要十分条件は $q_\mu(f)=r_\mu(f)$ が $P(X)$ のすべての元 μ について成立することである。以下 $K\cap(-K)$ の一つの元 f を固定して考える。$P(X)$ の任意の元 μ に対して，$C(X)$ 上に定義された連続線形写像 L で，L の A への制限が μ と一致しさらに $L(f)=\inf\{\mu(g)\,;\,g\in A$ かつ $f\leqq g\}=q_\mu(f)$ 及び $L\leqq q_\mu$ をみたすものが存在する。$C(X)$ の任意の元 g に対して $r_\mu(g)=-q_\mu(-g)\leqq L(g)\leqq q_\mu(g)$ が立立することにより L は positive となり，又 $L(1)=1$ より L の表現測度 ν_1 は $P(X)$ の元となる。まったく同様にして $P(X)$ の元 ν_2 が存在して $\nu_2(f)=r_\mu(f)$ かつ $r_\mu(g)\leqq\nu_2(g)\leqq q_\mu(g)$ を $C(X)$ のすべての元 g に対して成立させる。ν_1，ν_2 に対する極大測度をそれぞれ τ_1，τ_2 とする。ここで $f\in K\cap(-K)$ であったから $\nu_1(f)=\tau_1(f)$，$\nu_2(f)=\tau_2(f)$ を得る。さらに題意より μ に対する極大測度は一意的だか

ら $\tau_1<\tau_2$，$\tau_2<\tau_1$ となるが，これより容易に $\tau_1(f)=\tau_2(f)$ を得る。そこで $q_\mu(f)=\nu_1(f)=\nu_2(f)=r_\mu(f)$ が成立する。よって f は A の位相的閉包に含まれる。逆むきの包含関係は自明である。　　　（証明終り）

＜定理 4-4 の証明＞　$P(X)$ の元 μ に対して，定理の条件がみたされているとする。$C(X)$ の部分空間 $K-K$ 上の連続線形写像 L を $K-K$ の任意の元 $f-g$ に対して $L(f-g)=-\mu(\overline{-f})+\mu(\overline{-g})$ によって定義すると，L は positive かつ $||L||=1$ となる。よって L の $C(X)$ 上への拡張写像 $\tilde{L}$ でその表現測度 ν が $P(X)$ の元となるものがえらべる。ここで $\mu\sim\nu$ なることは明らか。さて μ_1，μ_2 をともに μ に対する極大測度とすると，$-K$ の任意の元 f に対して次式を得る。

$$\begin{aligned}\nu(f)=\mu(\overline{f})&=\inf\{\mu(h)\ ;\ h\in A \text{ かつ } f\leqq h\}\\ &\geqq\inf\{\mu_1(h);\ h\in A \text{ かつ } f\leqq h\}\\ &\geqq\mu_1(f)。\end{aligned}$$

そこで $\mu_1<\nu$ を得るが，まったく同様に $\mu_2<\nu$ も得られる。ここで μ_1，μ_2 は極大測度だから $\nu<\mu_1$ かつ $\nu<\mu_2$ となり，これより $\mu_1<\mu_2<\mu_1$ が成立する。よって μ に対する極大測度は一意的である。　　　（証明終り）

＜定理 4-5 の証明＞　定理の条件のもとで，命題＜1＞と同値な命題＜2＞が導かれることを示す。f，g を $-K$ の元とする。X の任意の元 x に対して $\overline{f+g}(x)=\inf\{h(x);\ h\in A$ かつ $f+g\leqq h\}$。よって A の元 h で $f+g\leqq h$ となるものに対して $-K\ni f\leqq h+(-g)\in K$. 定理の条件より $K\cap(-K)$ の元 j が存在して $f\leqq j\leqq h-g$ をみたす。そこで $\overline{f}\leqq\overline{j}=j$ かつ $\overline{g}\leqq\overline{h-j}=h-j$ となるが，これより $\overline{f}+\overline{g}\leqq j+h-j=h$. ゆえに $\overline{f}(x)+\overline{g}(x)\leqq h(x)$。従って $\overline{f}+\overline{g}\leqq\overline{f+g}$ を得る。一方逆むきの不等式は自明であるから $\overline{f+g}=\overline{f}+\overline{g}$ が成立する。　　　（証明終り）

＜定理 4-6 の証明＞　この定理の条件は定理 4-5 の条件をみたしているから命題＜1＞が成立する。よって定理 4-4 より $P(X)$ の任意の元 μ に対して $\mu(\overline{f})=\inf\{\mu(h);\ h\in A$ かつ $f\leqq h\}$ が $-K$ のすべての元 f について成立することを示せばよい。$\mu(\overline{f})=\inf\{\mu(h);\ g\in K$ かつ $f\leqq g\}$ であるから，任意の正数 ε に対して K の元 g が存在して $f\leqq g$ 及び $\mu(g)$

$<\mu(\overline{f})+\varepsilon$ をみたしている。ところで定理の仮定より，$K\cap(-K)$ の元 j が存在して $f\leqq j\leqq g$ をみたす。ここで j は又 A の位相的閉包に入っているから，A の元 h が存在して $\|j-h\|<\varepsilon$ をみたす。そこで $-\varepsilon<j<\varepsilon$ より $f\leqq j<h+\varepsilon$ を得る。これより次式の成立が保証される。$\inf\{\mu(h);\ h\in A$ かつ $f\leqq h\}\leqq\mu(h+\varepsilon)\leqq\mu(j)+2\varepsilon<\mu(\overline{f})+3\varepsilon$。これから $\inf\{\mu(h);\ h\in A$ かつ $f\leqq h\}\leqq\mu(\overline{f})$。逆むきの不等式が成立することは自明であるから $\mu(\overline{f})=\inf\{\mu(h);\ h\in A$ かつ $f\leqq h\}$ となる。（証明終り）

（**5**） この節では前節にひきつづいて極大測度の一意性について論じる。その目的は定理4-5の逆の成立を証明することである。この結果，容易に命題＜４＞は命題＜１＞と＜７＞を合わせた命題と同値であることが判明する。

定理 5-1. 命題＜１＞の条件のもとで，$f\leqq g$ なる $-K$ の元 f と K の元 g に対して $K\cap(-K)$ の元 h が存在して $f\leqq h\leqq g$ をみたす。

この定理の証明の準備のために，まず次の補題を証明する。

補題 5-2. 次の三つの命題は同値である。

＜８＞ $f\leqq g$ なる $-K$ の元 f と K の元 g に対して $f\leqq h\leqq g$ となる $K\cap(-K)$ の元 h が存在する。

＜９＞ $f\leqq g$ なる $-K$ の元 f と K の元 g，さらに任意の正数 ε と $P(X)$ の元 μ に対して，$f\leqq f_1\leqq g_1\leqq g$ かつ $\mu(g_1-f_1)<\varepsilon$ をみたすような $-K$ の元 f_1 と K の元 g_1 が存在する。

＜10＞ $f\leqq g$ なる $-K$ の元 f と K の元 g に対して，$f\leqq\overline{f}\leqq h\leqq g$ となる $-K$ の元 h が存在する。

＜**証明**＞ ＜８＞⇒＜10＞は明らか。まずはじめに＜９＞⇒＜８＞を証明する。このため $C(X)$ の部分集合 F_ε，G をそれぞれ次のように定義する。

$F_\varepsilon=\{f_1-g_1+\varepsilon\ ;\ f_1\in -K,\ g_1\in K$ かつ $f\leqq f_1\leqq g_1\leqq g\}$。

$G=\{f\ ;\ f>0\}$。

ここで $F_\varepsilon\cap G=\phi$ と仮定する。すると hahn Banach の定理より $C(X)$

上の連続線形関数 L と実数 $a\leqq 0$ が存在して $L(F_\varepsilon)\leqq a<L(G)$ となる。ここで L の表現測度 μ が $P(X)$ の元であるように L を選ぶことができる。ここで与えられた命題＜９＞に対する矛盾が導かれる。よって任意の正数 ε に対して $F_\varepsilon\cap G\neq\phi$。従って特に任意の自然数 n に対して，$-K$ の元 f_n と K の元 g_n で $g_n-f_n<\dfrac{1}{n}$ かつ $f\leqq f_n\leqq f_{n+1}\leqq g_{n+1}\leqq g_n\leqq g$ をみたすものがある。関数 j を $j=\lim\limits_{n\to\infty}f_n=\lim\limits_{n\to\infty}g_n$ とおくと j が $K\cap(-K)$ の元となることは容易にたしかめられる。又明らかに $f\leqq j\leqq g$ が成立している。次に＜10＞⇒＜９＞を証明する。$-K$ の元 f と K の元 g で $f\leqq g$ なるものえらぶ。また任意の正数 ε と $P(X)$ の元 μ とを固定して考える。$\mu(\overline{f})=\inf\{\mu(g_1);\ g_1\in K$ かつ $f\leqq g_1\}$ であるから，K の元 g_1 で $f\leqq g_1$ かつ $\mu(\overline{f})\leqq\mu(g_1)<\mu(\overline{f})+\varepsilon$ をみたすものがある。$g_2=g_1\wedge g$ とおけば g_2 は K の元であり＜10＞より $-K$ の元 j が存在して $f\leqq\overline{f}\leqq j\leqq g_2\leqq g$ をみたす。さらにここで $\mu(g_2-j)\leqq\mu(g_2-\overline{f})\leqq\mu(g_1-\overline{f})<\varepsilon$。

（証明終り）

$B(X)$ を X 上の有界 Bair 関数の全体とする。位相は通常の sup-norm によって導入される。$B(X)$ の元 f と X の元 x に対して $\overline{f}(x)=\inf\{h(x);\ h\in A$ かつ $f\leqq h\}$ とおく。また $B(X)$ の部分集合 W を $W=\{f;\ f=\overline{f}\}$ によって定義する。するとこのとき次の四つの命題が自然に成立することを注意しておく。

＜11＞　$W\cap C(X)=K$。

＜12＞　W は演算 $\min(f,\ g)$ について閉じている。

＜13＞　W 及び $C(X)$ はともに $B(X)$ の閉部分集合。

＜14＞　f を $B(X)$ の元，x を X の元とすると $\overline{f}(x)=\sup\{\mu(f);\ \mu\sim\varepsilon_x\}$。

以上の論議をふまえて次の二つの補題を証明する。するとこの結果より定理 5-1 が容易に導かれる。

補題 5-3.　命題＜１＞の条件のもとで f を $-K$ の元とすれば $\overline{f}$ は $-W$ の元となる。

補題 5-4.　$f\leqq g$ なる $C(X)$ の元 f と W の下半連続連数 g に対して $f\leqq h\leqq g$ なる K の元 h が存在する。

＜**補題5-3の証明**＞　f を $-K$ の元とすると $-\overline{f}$ は $B(X)$ の元となる。ここで命題＜1＞と同値な命題＜2＞及び＜14＞を使えば次の等式を得る。$\overline{(-\overline{f})}=\sup\{\mu(-\overline{f});\ \mu\sim\varepsilon_x\}=\sup\{-\overline{f}(x);\ \mu\sim\varepsilon_x\}=-\overline{f}(x)$。ゆえに $-\overline{f}\in W$ すなわち $\overline{f}\in -W$ を得る。　（証明終り）

＜**補題5-4の証明**＞　$f\leqq g$ なる $C(X)$ の元 f と W の下半連続関数 g を固定する。$P(X)$ の元 μ と任意の正数 ε に対して $\mu(\overline{f})=\inf\{\mu(h);\ h\in K$ かつ $f\leqq h\}$ より K の元 h が存在して $f\leqq h$ かつ $\mu(\overline{f})\leqq\mu(h)<\mu(\overline{f})+\varepsilon$ をみたす。ところでここで $\overline{f}\leqq\overline{g}=g$ より $\mu(h)<\mu(g)+\varepsilon$ すなわち $\mu(g-h+\varepsilon)>0$ を得る。従って $F_\varepsilon=\{g-h+\varepsilon;\ h\in K$ かつ $f\leqq h\}$ とおけばこの下半連続関数族は空集合ではない。さらに $C(X)$ の凸部分集合 $\widetilde{F}_\varepsilon$ を次のように定める。$\widetilde{F}_\varepsilon=\{v;\ v$ に対して F_ε の有限個の元 $f_1, f_2, \ldots, f_n$ と正数 $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ が存在して $v\leqq\sum_{j=1}^{n}a_jF_j$ とできる$\}$。ここでもし $G\cap\widetilde{F}_\varepsilon=\phi$ と仮定すれば $C(X)$ 上の連続線形関数 L と実数 $a\leqq 0$ で $L(\widetilde{F}_\varepsilon)\leqq a<L(G)$ をみたすものが存在する。さらに L の表現測度 μ が $P(X)$ の元となるように L をえらべるからこのとき $\widetilde{F}_\varepsilon$ の任意の元 v に対して $\mu(v)\leqq 0$ となる。これは補題の条件に矛盾している。従って $G\cap\widetilde{F}_\varepsilon\neq\phi$ でなくてはならない。これからすぐに $G\cap F_\varepsilon\neq\phi$ が導かれる。これは任意の正数 ε に対して W の下半連続関数 h で $f\leqq h<g+\varepsilon$ をみたすものが存在することを示している。従って $C(X)$ の可算部分集合 $\{h_n;\ n=1, 2, \ldots\}$ と W の下半連続な関数の可算部分集合 $\{g_n;\ n=1, 2, \ldots\}$ で任意の n について $f\leqq h_n<g$ かつ $h_n\leqq h_{n+1}\leqq g_{n+1}\leqq g_n\leqq h_n+2^{-n}$ をみたすものが帰納的に構成できる。一方 $\{h_n\}$, $\{g_n\}$ はともに $B(X)$ の Cauchy 列であるから極限関数 j が X の任意の元 x について $j(x)=\lim_{n\to\infty}h_n(x)=\lim_{n\to\infty}g_n(x)$ によって定義される。そこで命題＜13＞より $j\in C(X)\cap W$ となるが，これと命題＜11＞より $j\in K$ となる。ここで明らかに $f\leqq j\leqq g$ が成立している。　（証明終り）

参 考 文 献

［1］ Bishop and de Leeuw, The representation of linear functionals by measure on sets of extreme points, Ann. Inst. Fourier, Tom. 9, 1959.

［2］ Boboc and Cornea, Convex cones of linear semicontinuous functions on compact spaces, Rev. Roum. Pure et Ap., Tom. 12, 1967.

［3］ Phelps, Lectures on Choquet's Theorem, van Nostrand, 1966.